APPUNTI SUI MOTI PLANETARI

L. G. Molinari

March 31, 2009

Tra Marte e Giove vi era una lacuna, evidenziata dalla legge empirica di Titius e Bode per le distanze planetarie (in unità astronomiche)

$$d_n = 0.4 + 0.075 \times 2^n. \tag{1}$$

La legge risultava ben verificata per i pianeti conosciuti, da Mercurio ($n = 1$) a Saturno ($n = 7$), e fu confermata dalla successiva scoperta di Urano (W.Herschel, 1781), corrispondente a $n = 8$. La lacuna si situava in $n = 5$, a cui non corrispondeva nessun pianeta. Fu organizzata una associazione di astronomi col compito di esplorare la lacuna.

Il 1 gennaio 1801 l'astronomo Padre Giuseppe Piazzi scoprì a Palermo un corpo celeste mobile. Fu osservato per oltre un mese, poi scomparve nella luce del Sole. Invano fu ricercato dagli astronomi, le osservazioni di Piazzi non consentivano una adeguata determinazione dell'orbita. Ma non per un genio della matematica: Carl Gauss (aveva 24 anni) si interessò al problema e poco dopo pubblicò gli elementi orbitali e le effemeridi. L'oggetto fu rinvenuto in dicembre dove era previsto, e Gauss divenne celebre. La sua distanza media dal Sole, 2.77 u.a., lo collocava proprio nella lacuna: si trattava del primo asteroide, battezzato Cerere Ferdinandea. Poco dopo nella stessa lacuna, denominata *fascia degli asteroidi*, furono scoperti Pallade (Olbers, 1802), Giunone (1804, Harding) e Vesta (1807, Olbers), poi nulla fino al 1845.

Gauss pubblicò il suo metodo nel *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium* (1809), dove mostrava che con sole tre osservazioni astronomiche (sei coordinate di posizione) è possibile determinare completamente un'orbita, basandosi sulle tre leggi di Keplero. Introduceva inoltre il fondamentale "metodo dei minimi quadrati", per la determinazione ottimale dei parametri di curve interpolanti dei dati sperimentali.

1 Le leggi di Keplero

Giovanni Keplero fu assistente di Tycho Brahe, e per anni studiò l'arduo problema del moto di Marte, soggetto a rapidi moti retrogradi e grandi variazioni di splendore. Il risultato di tanta ricerca furono le prime due leggi, pubblicate nel 1609 nell'*Astronomia Nova*:
1) I pianeti su muovono su orbite ellittiche, e il Sole ne occupa un fuoco.
2) Il raggio vettore spazza aree in tempi uguali (Legge delle aree).
La terza legge apparve successivamente (1618) nell'*Harmonices Mundi*:
3) Il rapporto a^3/T^2, dove a è il semiasse maggiore dell'ellisse e T è il periodo orbitale, è identico per tutti i pianeti.

1.1 Orbita ellittica

L'ellisse è il luogo geometrico dei punti del piano la cui somma delle distanze da due punti (fuochi) è costante. In coordinate cartesiane una ellisse di semiassi a e b ($a \geq b$) ha equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2}$$

I fuochi dell'ellisse hanno coordinate $(\pm c, 0)$ e dalla definizione consegue che $c^2 = a^2 - b^2$. L'eccentricità è il rapporto $e = c/a$. Poniamo il Sole nel fuoco $(c, 0)$; si introducono le lunghezze $q = a - c$ (distanza del perielio dal Sole) e $Q = c + a$ (distanza dell'afelio dal Sole).

L'equazione dell'ellisse può essere risolta in forma parametrica ponendo

$$x = a \cos E, \qquad y = b \sin E \tag{3}$$

in cui l'angolo E è denominato *anomalia eccentrica*. Questa rappresentazione suggerisce un semplice metodo grafico per disegnare l'ellisse (vedi Fig.1):
1) si disegnano una circonferenza di raggio a e una interna di raggio b;
2) si traccia un raggio arbitrario nel primo quadrante, che interseca la circonferenza esterna in A e quella interna in B. Il punto P con la stessa ordinata di B e la stessa ascissa di A appartiene all'ellisse;
3) si ripete la costruzione 2 per ottenere un numero sufficiente di punti nel primo quadrante, che si riportano per riflessione negli altri quadranti.

1.2 L'equazione di Keplero

Keplero ottenne anche una equazione per determinare l'angolo di posizione E in funzione del tempo; si basa sulla legge delle aree. L'area dell'ellisse è

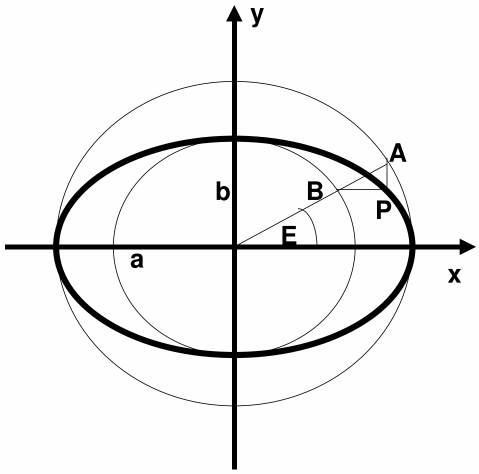

Figure 1: La costruzione dell'ellisse di semiassi assegnati.

$A = \pi ab$, pertanto l'area spazzata nell'unità di tempo (velocità areolare) è $\dot{A} = A/T$ dove T è il periodo orbitale. Dopo un tempo $t - t_0$ dal passaggio al perielio l'area spazzata è $\dot{A}(t - t_0)$. La stessa area può essere calcolata in funzione dell'angolo E del pianeta, $\frac{1}{2}ab(E - e\sin E)$. L'uguaglianza fornisce l'**equazione di Keplero**, una equazione trascendente per E:

$$\boxed{\frac{2\pi}{T}(t - t_0) = E - e\sin E} \tag{4}$$

La soluzione va ricercata numericamente o per approssimazioni successive (le funzioni di Bessel furono introdotte per questo problema). Se l'eccentricità è piccola (orbita quasi circolare) funziona un metodo ricorsivo: posto $\mathcal{M} = (2\pi/T)(t - t_0)$ (*anomalia media*) si riscrive l'equazione di Keplero

$$E = \mathcal{M} + e\sin E \tag{5}$$

Si inizia con $E^{(0)} = \mathcal{M}$ (la soluzione con $e = 0$) e si ricalcola E: $E^{(1)} = \mathcal{M} + e\sin\mathcal{M}$. Questo valore viene rimesso nel secondo membro di (5) per ottenere una stima migliore di E (che chiamiamo $E^{(2)}$). Il processo continua fino ad ottenere la cifra significativa desiderata; infatti la distanza tra due successive approssimazioni scende rapidamente: $|E^{(n+1)} - E^{(n)}| = e|\sin E^{(n)} - \sin E^{(n-1)}| \leq e|E^{(n)} - E^{(n-1)}|$. Iterando la diseguaglianza si ha: $|E^{(n+1)} - E^{(n)}| \leq e^n|E^{(1)} - E^{(0)}| = e^{n+1}|\sin\mathcal{M}|$ (se $e = 0.1$, ogni approssimazione guadagna in precisione almeno una cifra significativa).

Calcolato E si ottengono le coordinate (x, y) del pianeta. La distanza dal Sole è data dal teorema di Pitagora, $r = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$; si ottiene la formula

$$r = a(1 - e\cos E) \tag{6}$$

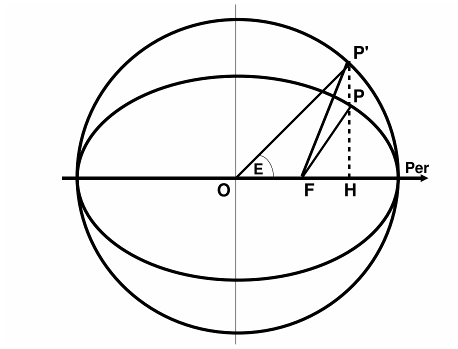

Figure 2: Equazione di Keplero. L'area del settore Fuoco-Perielio-punto P dell'ellisse (area spazzata dal raggio vettore) e' il riscalamento dell'area Fuoco-Perielio- punto P' sul cerchio esterno.

(Nota 1. l'equazione cartesiana dell'ellisse suggerisce che le aree dell'ellisse o settori di essa possano ottenersi dal cerchio di raggio a con un cambiamento di scala di una sola dimensione, $y \to b(y/a)$. L'area del cerchio πa^2 riscala nell'area dell'ellisse πab. Nel cerchio di centro O si considera la regione racchiusa tra $F = (c, 0)$ (fuoco), $Per = (a, 0)$ (perielio) e il punto $P' = (a \cos E, a \sin E)$, con P' e Per connessi dall'arco di circonferenza con angolo al centro uguale a E. L'area è ottenuta sottraendo all'area del settore $OPerP'$, di misura $\frac{1}{2}a^2E$, l'area del triangolo OFP' pari a $\frac{1}{2}\overline{OF}\,\overline{OP'} \sin E = \frac{1}{2}ca \sin E = \frac{1}{2}a^2 e \sin E$. L'area risultante $\frac{1}{2}a^2(E - e \sin E)$ viene riscalata in $\frac{1}{2}ab(E - e \sin E)$, area spazzata dal pianeta sull'ellisse).
(Nota 2. l'equazione di Keplero fu risolta in modo completo da Bessel:

$$E = \mathcal{M} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} J_n(ne) \sin(n\mathcal{M}) \tag{7}$$

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e}{n} J'_n(ne) \cos(n\mathcal{M}) \tag{8}$$

dove $J_n(z)$ è la funzione di Bessel di indice intero n, e $J'_n(z)$ è la sua derivata rispetto alla variabile z.)

2 La gravitazione universale

Le leggi di Keplero e tutta la meccanica celeste, con gli sviluppi della teoria delle perturbazioni per descrivere gli effetti di interazioni tra più corpi, discendono dalla legge della gravitazione di Isaac Newton: una massa m_1 in presenza di una massa m_2 è soggetta ad una forza attrattiva

$$\vec{F}_1 = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\vec{n}_{12} \tag{9}$$

G è la costante di gravitazione, r_{12} è la distanza tra le masse (puntiformi), $\vec{n}_{12}$ è il versore che da 1 punta a 2. La forza è dunque diretta come il raggio vettore che unisce 2 a 1, ed è pertanto una *forza centrale*.

Per il III principio della meccanica la massa 2, per la presenza di 1, è soggetta a una forza $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$. Se non vi sono altre masse, la forza totale agente sul sistema costituito dalle due masse è nulla e il baricentro del sistema si muove di moto rettilineo uniforme. Per un sistema Sole-pianeta, la massa del pianeta è trascurabile rispetto alla massa del Sole $M_\odot$, e il baricentro coincide praticamente col centro del Sole.

La seguente proposizione è fondamentale per il nostro discorso: la conoscenza della posizione $\vec{r}_1(t_0)$ e della velocità $\vec{v}_1(t_0)$ di 1 in un istante iniziale t_0 (rispetto al baricentro supposto fermo) permette, grazie alla legge di Newton $\vec{F}_1 = m_1\vec{a}_1$, la determinazione del moto di 1 per tutti i tempi t. Sono dunque sufficienti 6 dati (tre coordinate di posizione e tre di velocità) per determinare in modo completo l'orbita di un pianeta soggetto alla forza del Sole. Il problema degli astronomi è il seguente: 1) le coordinate sono misurate da Terra, che è in moto attorno al Sole, 2) da Terra si possono misurare facilmente angoli e non distanze. Il primo problema si risolve con opportune trasformazioni di coordinate da sistemi geocentrici a eliocentrici (trigonometria sferica) e richiede l'accurata conoscenza del moto terrestre (posizione e velocità della Terra). Il secondo fu brillantemente risolto da Gauss.

2.1 Leggi di conservazione

La sola caratteristica di centralità della forza (azione lungo la direzione che unisce le masse) implica la conservazione del vettore **momento angolare orbitale**:

$$\vec{M} = m\vec{r}(t) \times \vec{v}(t) \tag{10}$$

dim: Calcoliamo $\vec{M}(t+\delta t) = m\vec{r}(t+\delta t) \times \vec{v}(t+\delta t)$; per un intervallo di tempo piccolo si può scrivere $\vec{r}(t+\delta t) \approx \vec{r}(t) + \vec{v}(t)\,\delta t$ e $\vec{v}(t+\delta t) \approx \vec{v}(t) + \vec{a}(t)\,\delta t$, dove $\vec{a} = \vec{F}/m$. Con ciò, trascurando i termini quadratici in δt, si ottiene:
$\vec{M}(t+\delta t) \approx \vec{M}(t) + \delta t[m\vec{v}(t) \times \vec{v}(t) + \vec{r}(t) \times \vec{F}(t)] + \dots$
Il prodotto vettore $\vec{v} \times \vec{v}$ è sempre nullo e $\vec{r} \times \vec{F}$ è nullo perché la forza è centrale. Risulta allora $\vec{M}(t+\delta t) = \vec{M}(t)$ (il vettore non dipende dal tempo).□

La conservazione di un vettore implica quella di direzione, verso e modulo. La conservazione della direzione di $\vec{M}$ implica che l'orbita è piana, infatti il vettore posizione $\vec{r}$ è sempre contenuto nel piano ortogonale a $\vec{M}$. La conservazione del verso implica che il moto è costantemente antiorario attorno a $\vec{M}$.
La conservazione del modulo di $\vec{M}$ implica che la velocità areolare (l'area spazzata nell'unità di tempo) è costante (II legge di Keplero o *legge delle aree*). Infatti $|\vec{M}| = m|\vec{r}(t)||\vec{v}(t)|\sin\theta = mr(t)v_\perp(t)$, dove $\vec{v}_\perp$ è la componente trasversale della velocità. L'area spazzata nel tempuscolo δt è approssimabile a quella del triangolo

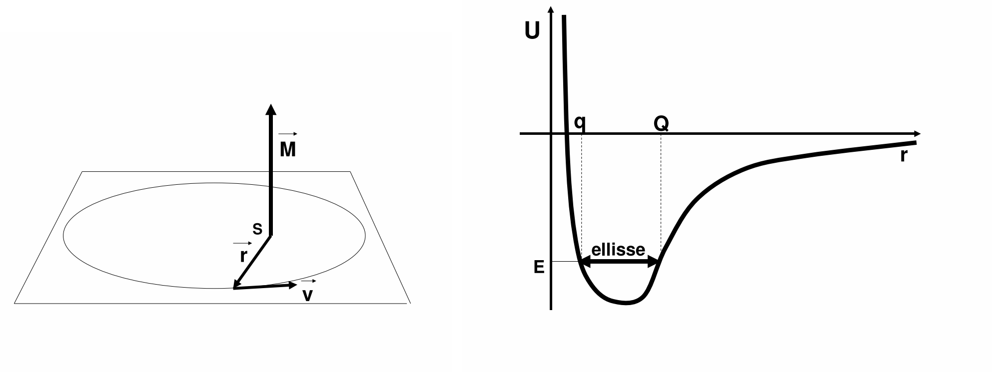

Figure 3: a) Il momento angolare orbitale è un vettore ortogonale ai vettori posizione e velocità. b) L'energia potenziale per il moto radiale (potenziale gravitazionale e centrifugo). Fissando l'energia totale si hanno una (iperbole e parabola) o due intersezioni (ellisse). L'intersezione a distanza minore fornisce il valore di q. Nelle intersezioni la velocità radiale si annulla e si inverte.

rettangolo di cateti $r(t)$ e $v_\perp(t)\delta t$. Nell'unità di tempo si ha la velocità areolare:

$$\dot{A} = \frac{|\vec{M}|}{2m} = \frac{1}{2} r(t) v_\perp(t) \tag{11}$$

Se il momento angolare è nullo la velocità è solo radiale e il corpo cade sul Sole.

La forza gravitazionale dipende dalla sola posizione e comporta la conservazione dell'**energia meccanica** E

$$E = \frac{1}{2} m v(t)^2 - G \frac{m M_\odot}{r(t)} \tag{12}$$

Scomponendo la velocità nelle componenti radiale e trasversale $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\perp$, tra loro ortogonali, si ha $v^2 = v_r^2 + v_\perp^2$. Usando la legge di conservazione (11) si riscrive la conservazione dell'energia in modo da fare comparire solo le componenti radiali:

$$\boxed{\frac{E}{m} = \frac{v_r(t)^2}{2} + \frac{2\dot{A}^2}{r(t)^2} - \frac{G M_\odot}{r(t)}} \tag{13}$$

Lo studio qualitativo dell'equazione (13) mostra che se $E > 0$ la traiettoria è aperta, se $E = 0$ la traiettoria è aperta e con velocità che tende a zero a distanza infinita, se $E < 0$ la traiettoria si compie a distanza finita dal Sole. La distanza minima q del pianeta dal Sole si ha per $v_r = 0$, ed è la soluzione positiva dell'equazione di secondo grado $\frac{E}{m} q^2 + G M_\odot q - 2\dot{A}^2 = 0$. Si ottiene:

$$q = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{G m M_\odot}{E}\right)^2 + \frac{8 m \dot{A}^2}{E}} - \frac{G m M_\odot}{2E}, \tag{14}$$

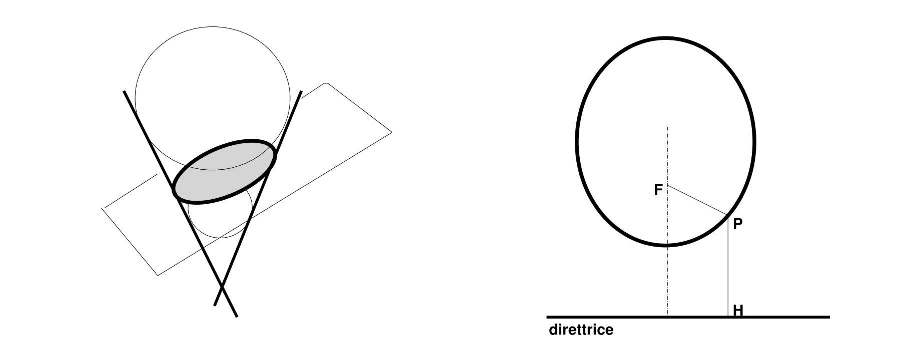

Figure 4: a) Un doppio cono tagliato da un piano individua due rami di iperbole (se il piano interseca entrambi i coni), una parabola (piano parallelo alla generatrice del cono), una ellisse (il piano interseca solo un cono). Le sfere tangenti individuano i fuochi. b) Le sezioni coniche sono luoghi dei punti del piano con rapporto $PF/PH = e$ (eccentricità).

Per energia negativa si ha una seconda soluzione positiva Q, corrispondente alla distanza dell'afelio:

$$Q = -\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{GmM_\odot}{E}\right)^2 + \frac{8m\dot{A}^2}{E}} - \frac{GmM_\odot}{2E}, \tag{15}$$

2.2 La forma delle orbite

Lo studio completo dell'equazione (13) mostra che le traiettorie sono *sezioni coniche*, rispettivamente una iperbole ($E > 0$), una parabola ($E = 0$) e una ellisse ($E < 0$).

Le sezioni coniche sono le figure che si ottengono intersecando un doppio cono con un piano. Furono studiate da Menecmo (IV sec. a.C.) e, due secoli dopo da Apollonio (che mise in luce le più importanti proprietà, come fuochi e asintoti). L'etimologia delle tre figure si richiama a questa costruzione: *élleipsis* (mancanza, in quanto è un circolo imperfetto), *parabállein* (mettere accanto, nel senso di mettere il piano parallelo a una generatrice), *hyperbállein* (gettare oltre). Le due sfere tangenti internamente al cono e al piano, toccano il piano nei due fuochi. A partire da ciò si può mostrare che una sezione conica è anche il luogo dei punti P del piano secante le cui distanze da un fuoco F e da una retta fissa (direttrice) sono in rapporto costante: $\overline{PF} = e\overline{PH}$. Il rapporto e è l'eccentricità.

Da quest'ultima definizione segue facilmente la seguente equazione polare di un'orbita, che lega la distanza r del pianeta dal Sole all'angolo di posizione ν, misurato a partire dal perielio nel verso del moto:

$$\boxed{r = \frac{q(1+e)}{1+e\cos\nu}} \tag{16}$$

q è la distanza perieliaca, normalmente misurata in unità astronomiche (a.u.), l'eccentricità e determina la forma dell'orbita ($e < 1$ ellisse, $e = 1$ parabola, $e > 1$ iperbole), ν è l'angolo di *anomalia vera*.

Si nota che per l'iperbole la distanza r diverge per i due valori angolari tali che $\cos\nu_{as} = -1/e$, corrispondenti alle direzioni dei due asintoti. Nell'ellisse l'anomalia vera ν e l'anomalia eccentrica E sono connesse dalla relazione

$$\tan\frac{\nu}{2} = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)\tan\frac{E}{2} \tag{17}$$

2.3 La terza legge di Keplero

Per l'orbita ellittica, dall'equazione di secondo grado per q e Q si ottengono i semiassi maggiore a e minore b:

$$2a = Q + q = -\frac{GmM_\odot}{E}, \qquad b^2 = Qq = -\frac{2\dot{A}^2}{E} \tag{18}$$

L'area dell'ellisse è $A = \pi ab$. Dato che la velocità areolare è uniforme, è $\dot{A} = A/T$, dove T è il periodo orbitale. Sostituendo $\dot{A} = \pi ab/T$ nella seconda equazione in (18) si arriva subito alla terza legge di Keplero:

$$\boxed{\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_\odot}{4\pi^2}} \tag{19}$$

Al perielio ($r = q$) la velocità orbitale ha solo la componente perpendicolare al raggio. Pertanto $\dot{A} = \frac{1}{2}qv_{\text{per}}$ e si ottiene la velocità perieliaca:

$$v_{\text{perielio}} = \frac{2\pi ab}{Tq} = \frac{2\pi a}{T}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tag{20}$$

Allo stesso modo, all'afelio si ha

$$v_{\text{afelio}} = \frac{2\pi ab}{TQ} = \frac{2\pi a}{T}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tag{21}$$

Si noti che per l'orbita circolare ($e = 1$) le velocità sono uguali.

2.4 Orbita parabolica

L'equazione cartesiana dell'orbita parabolica con perielio nell'origine e il Sole nel fuoco in $(0, q)$ è: $y = x^2/4q$. Introdotto l'angolo di anomalia vera ν e la distanza dal fuoco r, l'equazione (polare) della parabola è

$$r = \frac{2q}{1 + \cos\nu} \tag{22}$$

Si ricava la coordinata $x = r\sin\nu = 2q\tan(\nu/2)$. L'area spazzata dal raggio vettore fino al punto di ascissa x è ottenuta con un semplice integrale:

$$A = \frac{x}{2}(q + y) - \int_0^x dx' \frac{x'^2}{4q} = \frac{qx}{2} + \frac{x^3}{8q} - \frac{x^3}{12q} = q^2\left[\frac{1}{3}\tan^3\frac{\nu}{2} + \tan\frac{\nu}{2}\right] \tag{23}$$

La stessa area è uguale alla velocità areolare $\dot{A}$ moltiplicata per il tempo trascorso dal passaggio al perielio: $A = \dot{A}(t - t_0)$. Per la conservazione del momento angolare e dell'energia si ha, nel perielio:

$$M = 2m\dot{A} = mqv_{per}, \qquad 0 = \frac{1}{2}v_{per}^2 - \frac{GM_\odot}{q} \tag{24}$$

Pertanto $\dot{A} = \sqrt{GM_\odot q/2}$. Per la terza legge di Keplero riferita all'orbita terrestre: $a_\oplus^3/T_\oplus^2 = GM_\odot/(4\pi^2)$. In conclusione, l'equazione che lega l'anomalia vera al tempo trascorso dal passaggio perieliaco è:

$$\tan^3\frac{\nu}{2} + 3\tan\frac{\nu}{2} - 3\pi\sqrt{2}\left(\frac{a_\oplus}{q}\right)^{3/2}\frac{t - t_0}{T_\oplus} = 0 \tag{25}$$

L'equazione cubica ammette una sola radice reale. La sostituzione $\tan(\nu/2) = u - 1/u$ riduce l'equazione cubica a una quadratica in u^3, e si perviene a una soluzione analitica del problema.

3 Gli elementi orbitali

Un'orbita è caratterizzata dai suoi 6 elementi orbitali, che in progressione determinano la giacitura del piano orbitale, la posizione dell'orbita nel piano, la geometria dell'orbita, e un tempo di riferimento. Procediamo nell'ordine. L'intersezione del piano orbitale con il piano orbitale terrestre (*eclittica*) è la *linea dei nodi*, e contiene il Sole. La semiretta di detta linea che contiene il nodo ascendente forma con la semiretta Sole - punto γ un angolo Ω (misurato sull'eclittica nello stesso verso del moto terrestre). Il piano orbitale forma un angolo i (inclinazione) con il piano dell'eclittica. Ω e i sono i due elementi orbitali che individuano il piano.

Per precisare la posizione dell'orbita nel piano orbitale serve l'angolo ω, formato tra la linea del nodo ascendente e la semiretta che parte dal Sole e passa per il perielio. Esso si misura nel verso del moto orbitale.

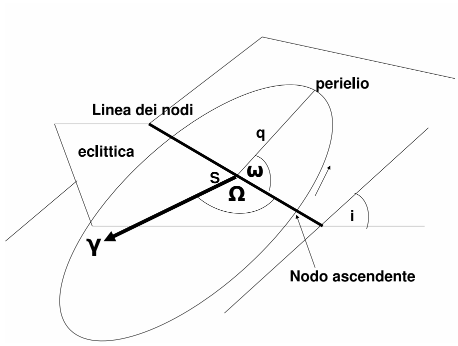

Figure 5: Gli elementi orbitali.

La forma dell'orbita è specificata dagli elementi orbitali q (distanza del perielio dal Sole, in unità astronomiche) ed eccentricità e. Infine è necessario conoscere l'istante del passaggio al perielio t. Per le orbite ellittiche si fornisce anche T, che però non è un elemento indipendente.

I dati orbitali sono pertanto sei: Ω, i, ω, q, e, t. Le sei incognite possono essere determinate da non meno di sei dati, che potrebbero essere la posizione e la velocità in un certo istante oppure, come ha mostrato Gauss, tre posizioni sulla sfera celeste (ognuna individuata da due angoli). Un numero maggiore di misurazioni è ridondante ma consente una determinazione più precisa dei dati orbitali, ed eventualmente anche le loro variazioni dovute all'influenza di altri pianeti.

Una fonte preziosa di informazioni sui corpi del sistema solare è il sito del Jet Propulsion Laboratory (NASA) *http://ssd.jpl.nasa.gov/*